1.3. Fonksiyonlar

Fonksiyon (dönüşüm) özel bir bağıntıdır.

Tanım 1.3.1. A ve B boş olmayan kümeler ve f, A dan B ye bir bağıntı olsun. $\forall a \in A$ için, a ya f ile bağlı B de bir ve yalnız bir eleman bulunabilirse, f ye A dan B ye bir fonksiyon denir ve $f: A \to B$ ile gösterilir. A ya f nin tanım kümesi, B ye de f nin değer kümesi denir. a ya f fonksiyonu ile karşılık gelen ve tek türlü olarak belirli olan b elemanı $f(a)=b$ ile gösterilir ve b ye f altında a nın görüntüsü denir.

$f: A \to B$ bir fonksiyon ise $A \times B$ nin $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ alt kümesine f nin grafiği denir.

Örnek: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $m \to f(m) = m^2$ bir fonksiyon olup görüntü kümesi $\{m^2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Tanım 1.3.2 $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. A nın birbirinden farklı herhangi iki elemanının görüntüleri de farklı ise f ye birebir fonksiyon denir ve $f: A \hookrightarrow B$ ile gösterilir.

$f: A \hookrightarrow B \iff \forall a_1, a_2 \, [a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)]$ veya

$f: A \hookrightarrow B \iff \forall a_1, a_2 \, [f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2]$

Tanım 1.3.3. $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. Her bir $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa f ye örten fonksiyon denir ve $f: A \twoheadrightarrow B$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.4. $A \neq \emptyset$ olsun $\forall a \in A$ için $f(a) = a$ ile tanımlanan $f: A \to A$ fonksiyonuna özdeşlik veya birim fonksiyon denir ve I_A ile gösterilir. $I_A: A \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow A$ $\{(a,a) \mid a \in A\}$

Tanım 1.3.5. $f: A \to B$, $g: B \to C$ iki fonksiyon olsun. $\forall a \in A$ için $h(a) = g(f(a))$ ile tanımlı $h: A \to C$ fonksiyonuna f ile g nin bileşkesi denir ve $h = g \circ f$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.6. $f: A \to B$ fonksiyonu verilmiş olsun.

(i) Bir $C \subseteq A$ için $f(C) = \{ f(a) \mid a \in C \} \subseteq B$ alt kümesine, C nin f altındaki görüntüsü denir.

(ii) Bir $D \subseteq B$ için $f^{-1}(D) = \{ a \in A \mid f(a) \in D \} \subseteq A$ alt kümesine, D nin f altındaki ters görüntüsü denir.

Örnek: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = [\![x]\!]$ ve $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ ise $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $(f \circ g)(x) = f([\![x]\!]) = [\![x]\!]^2$ ile tanımlıdır.

Tanım 1.3.7. $f: A \to B$ 1-1 ve örten bir fonksiyon ise $\forall b \in B$ elemanına $f(a) = b$ o.ş. (tek türlü belirli olan) bir $a \in A$ elemanı karşılık getirilerek, B den A ya tanımlanan fonksiyona f nin ters fonksiyonu denir ve $f^{-1}: B \to A$ ile gösterilir. O halde f 1-1 ve örten ise
$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$
dır. Ayrıca $f \circ f^{-1} = I_B$ ve
$$f^{-1} \circ f = I_A$$
dır.

Teorem 1.3.8. $f:A\to B$ ve $g:B\to C$ fonksiyonları verilsin.

(i) f ve g örten ise $g\circ f$ de örtendir.
(ii) f ve g 1-1 ise $g\circ f$ de 1-1 dir.

1.4. İkili İşlemler

Tanım 1.4.1. $A\times A$ dan A ya bir fonksiyona A da bir ikili işlem denir. $*$, A da bir ikili işlem ve $a,b\in A$ olsun. (a,b) nin $*$ işlemi altındaki görüntüsünü $a*b$ ile gösterelim. Fonksiyon olma özelliklerinden, (i) $\forall a,b\in A$ için A da bir $a*b$ elemanı var ve (ii) Bu eleman tek türlü belirlidir.
Bu özelliklerden birincisine işlemin kapalılığı, ikincisine de iyi tanımlılığı denir.

Örnek: $\mathbb{R}_2^2$ de ($\mathbb{R}$ üzerinde 2×2 tipindeki matrislerin kümesi) iki matrisin toplamı aşağıdaki gibi tanımlansın.
Bu bir ikili işlemdir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Örnek: $\mathbb{Z}^+$ da "$-$" işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$-: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ Bu işlem bir ikili işlem değildir.

$(a,b) \to a-b$

$a=2, \ b=3 \Rightarrow a-b = 2-3 = -1 \notin \mathbb{Z}^+$

Örnek: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de "$+$" işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın. Bu bir ikili işlem midir?

$+: (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \to (x_1-x_2, y_1\cdot y_2)$

$(2,3),(4,7) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $(2,3)+(4,7) = (2-4, 3\cdot 7)$
$= (-2,21) \notin \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

olup $+$ işlemi $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de bir ikili işlem değildir.

Tanım 1.4.2. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlı boş olmayan bir kümeye cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlı ise bu cebirsel yapı $(A,*)$ ile gösterilir.

Örnek: $(\mathbb{N},+)$ ve $(\mathbb{N},\cdot)$ birer cebirsel yapıdır.

Tanım 1.4.3. $*$, A üzerinde bir ikili işlem olsun.

(i) $\forall a,b \in A$ için $a*b = b*a$ ise $*$ işlemi değişme öz. sahiptir denir.

(ii) $\forall a,b,c \in A$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$ ise $*$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir denir.

(iii) $\forall a \in A$ için $a*e = a$ (sağ birim) o.ş. en az bir
$e*a = a$ (sol ") $e \in A$ varsa e elemanına $*$ işleminin etkisiz veya birim elemanı denir.

(iv) e, $*$ işleminin etkisiz elemanı olsun. $a \in A$ için $a*a' = e = a'*a$ o.ş. $\exists a' \in A$ varsa a' elemanına a elemanının $*$ işlemine göre tersi denir ve a^{-1} veya $-a$ ile gösterilir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ de çarpma işleminin birim elemanı $e = 1$ dir.
$\mathbb{Z}$ de toplama " " " $e = 0$ dır.

Örnek: $2\mathbb{Z}$ deki çarpma işleminin birim elemanı e olsun.

$\forall\, 2n \in 2\mathbb{Z}$ için $2n \cdot e = 2n \Rightarrow e = 1$ ancak $1 \notin 2\mathbb{Z}$ olduğundan

$2\mathbb{Z}$ de çarpma işlemine göre birim eleman yoktur.

Örnek: $\mathbb{R}$ de $0 \neq a \in \mathbb{R}$ nin çarpmaya göre tersi var ve $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$

Örnek: $\mathbb{Z}$ de $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ nin " " " sadece $a = 1$

ve $a = -1$ için vardır. $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ dir.

Ödev: $\mathbb{R}$ de $*$ işlemi $a * b = a + b + ab$ şeklinde tanımlanıyor.

$*$ işleminin birim ve ters elemanlarını bulunuz. Aynı soruyu $\mathbb{Z}$ için

Önerme 1.4.4. (Çözünüz) $*$, A üzerinde bir ikili işlem olsun. A da $*$

işleminin birim (etkisiz) elemanı varsa tektir.

Önerme 1.4.5. $*$, A üzerinde bir ikili işlem olsun. $a \in A$ elemanının

tersi a^{-1} olmak üzere $(a^{-1})^{-1} = a$ dır.

Önerme 1.4.6. $*$, A üzerinde birleşmeli bir ikili işlem olmak üzere, etkisiz

elemanı e olsun. Bu takdirde $a \in A$ nın tersi varsa tektir.

BÖLÜM 2

TAM SAYILAR

2.1. Tam sayılar.

Bu bölümde Soyut Matematik dersinde inşa ettiğimiz tam sayılar kümesinin temel özellikleri incelenecektir.

$\mathbb{Z}$ de ikili işlem toplama ve çarpma $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için

$(x,y) \to x+y$ ve $(x,y) \to x.y$ şeklinde tanımlanabilir.

Ayrıca çıkarma işlemi $x,y \in \mathbb{Z}$ için $x-y = x+(-y)$ toplama işlemi yardımıyla tanımlanabilir.

Toplama ve çarpmanın şu özellikleri vardır.

$\mathbb{Z}_1$: Birleşme Kuralı: $x+(y+z) = (x+y)+z$, $(xy)z = x(yz)$

$\mathbb{Z}_2$: Değişme Kuralı: $x+y = y+x$, $xy = yx$

$\mathbb{Z}_3$: Etkisiz Eleman: $x+0 = x$, $x.1 = x$

$\mathbb{Z}_4$: Toplamsal Ters Eleman: $x+(-x) = 0$

Her tam sayının çarpımsal tersi yoktur. Çarpımsal terslerinin olması için rasyonel sayılar inşa edilir.

$\mathbb{Z}_5$: Dağılma Kuralı: $x(y+z) = xy+xz$

Ayrıca dağılma özelliği genelleştirilerek,

$(x_1+x_2+ \dots +x_m)(y_1+y_2+ \dots +y_n) = x_1y_1+x_1y_2+ \dots +x_r y_s$

yazılabilir.

$\mathbb{Z}_6$: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $ab \neq 0 \Rightarrow a \neq 0,\ b \neq 0$ dır.

Bu özellik, tam sayılar kümesinde sıfır bölen yoktur şeklinde ifade edilir. Bunun sonucu olarak $x,y,z \in \mathbb{Z}$ $z \neq 0$ ve $xz = yz \Rightarrow x = y$ kısaltma öz. sağlanır.

$\mathbb{Z}_7$: $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1+y_1 \leq x_2+y_2$

$\mathbb{Z}_8$: $x \leq y$ ve $z > 0$ ise $xz \leq yz$ dir.

Tanım 2.1.1. Bir a tam sayısının mutlak değeri $|a|$ ile gösterilir ve

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ ise} \\ -a, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Mutlak değer aşağıdaki özelliklere sahiptir.

M_1: $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $|a| \geq 0$ dır.

M_2: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

M_3: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Teorem 2.1.2. $m,n \in \mathbb{Z}^+$ ve $x,y \in \mathbb{Z}$ için

(i) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ (ii) $(x^m)^n = x^{mn}$ (iii) $(xy)^m = x^m \cdot y^m$.

Tanım 2.1.3. $a,b \in \mathbb{Z}$ için $b = a.c$ o.ş. en az bir $c \in \mathbb{Z}$ bulunabiliyorsa a; b yi böler denir ve $a|b$ ile göst.

Eğer $b = ac$ o.ş. en az bir $c \in \mathbb{Z}$ bulunamıyorsa a, b yi bölmez denir ve $a \nmid b$ ile gösterilir.

0 ın her katı 0 old dan $0|0$ dır. $0|a$ ise $a=0$ dır.

Not: $0|0$ ve $\frac{0}{0}$ ifadelerini karıştırmayınız.

Teorem 2.1.4. $a,b,c \in \mathbb{Z}$ için

(i) $\mp 1|a$ ve $\mp a|a$ dır. (ii) $a|\mp 1 \Leftrightarrow a = \mp 1$ dir.

(iii) $a|b$ ve $b|c$ ise $a|c$ dir. (iv) $a|b$ ve $b|a$ ise $a = \mp b$ dir.

(v) $a|b$ ise $\mp a|\mp b$ dir.

(vi) Eğer $a|b$ ve $a|c$ ise $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $a|bx+cy$ dir.

(vii) $a|b$ ise $\forall c \in \mathbb{Z}$ için $a|bc$ dir.

Tanım 2.1.5 . $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a | b$ ve $b | a$ ise a ile b'ye **ilgili tam sayılar** denir.

Not: (iv) den sıfırdan farklı her tam sayı bir pozitif tam sayı ile ilgilidir. İlgililik bağıntısı bir denklik bağıntısı old. dan (?), bölünebilme söz konusu olduğunda pozitif tam sayıları düşünmek yeterlidir.

Tanım 2.1.6 . Pozitif bölenleri yalnız 1 ve kendisi olan 1 den büyük tam sayılara **asal tam sayılar** denir.

En küçük ve tek çift asal tam sayı 2 dir.

Asal sayılar kümesi $\mathbb{P}$ ile göst. $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$.

Asal olmayan 1 den büyük bir tam sayıya **bileşik tam sayı** adı verilir.

Önerme 2.1.7 . Her $a > 1$ tam sayısının en az bir asal böleni vardır.

İspat: a, $\mathbb{Z}$ de 1 den büyük bir tam sayı olmak üzere

$S_a = \{ d \in \mathbb{Z} \mid d > 1 \text{ ve } d | a \}$ kümesini alalım.

$a|a$ ve $a>1$ old. dan $a\in S_a$ olup $S_a \neq \emptyset$ dır.
Pozitif tam sayılar kümesi iyi sıralı old. dan bir en küçük elemana sahiptir. Buna p diyelim. Yani p, $p|a$ ve $p>1$ o.ş. en küçük tam sayı olsun. Şimdi p nin asal olduğunu gösterelim. K.edelim ki p asal olmasın. Bu takdirde $p=qr$ ve $1<q<p$ o.ş. $\exists\, q, r \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\left.\begin{array}{l} p=qr \Rightarrow q|p \\ p|a \end{array}\right\} \Rightarrow q|a$$ olur. Ayrıca $q>1$ old. dan S_a nın tanımı gereği $q\in S_a$ olur. Bu ise p nin S_a nın en küçük elemanı olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup p asaldır.

Sonuç 2.1.8. 1 den büyük herhangi bir tam sayıyı bölen 1 den büyük en küçük tam sayı asaldır.

Önerme 2.1.9. (Euclid) Sonsuz tane asal sayı vardır.

İspat: K.edelim ki asal tam sayılar kümesi

$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ sonlu olsun. $a = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ tam sayısının bir önceki önermeye göre en az bir p asal böleni vardır. $p \in \mathbb{P}$ dir. Yani p, $p_1, p_2 \ldots p_r$ den birisidir. Öyleyse $p_i = p \mid p_1 \ldots p_r$ dir.

$p \mid a$ ve $p \mid p_1 \ldots p_r \Rightarrow p \mid a - p_1 p_2 \ldots p_r = 1$ olup $p = 1$ dir.

Bu ise p nin asal olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup sonsuz tane asal sayı vardır.

Teorem 2.1.10. 1 den büyük her tam sayı sonlu sayıda bir takım asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir.

Teorem 2.1.11 (Aritmetiğin Temel Teoremi) Sıfırdan farklı her $a \in \mathbb{Z}$, $a = (\mp 1)(p_1 p_2 \ldots p_n)$ şeklinde farklı olmaları gerekmeyen bir takım asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış sıra düşünmediğinden tek türlüdür.

Aynı asal sayıların çarpımını üslü şeklinde yazarak

$a = (\mp 1) p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_t^{m_t}$ $(p_i \in \mathbb{P}, m_i > 0, i = 1, 2, \ldots, t)$ şeklinde

gösterilebilir.

Teorem 2.1.12. Pozitif m ve n tam sayıları verildiğinde, tek türlü olarak belirli öyle bir q, r tamsayıları vardır ki

$n = qm + r$ ve $0 \leq r < m$ olur.

İspat: $n = 1$ olsun. Eğer $m = 1$ ise $q = 1, r = 0$ ve $m > 1$ ise $q = 0$, $r = 1$ alınarak $n = 1$ için iddianın doğru olduğu görülür.

$n < m$ ise $q = 0, r = n$ alınabilir. $m \leq n$ ise $0 \leq n - m < n$ olur ve $n - m = q_1 m + r$ ve $0 \leq r < m$ o.ş. $\exists q_1, r \in \mathbb{Z}$ varsa

$n = m + q_1 m + r = (1 + q_1) m + r$ olacağından n için de iddianın doğru olduğu görülür.

Şimdi q ve r nin tekliğini gösterelim.

K.edelim ki $n = q_1 m + r_1$, $0 \leq r_1 < m$ ve $r_1 \neq r_2$ olsun.
$n = q_2 m + r_2$, $0 \leq r_2 < m$

$r_2 > r_1$ olsun. $q_1 m + r_1 = q_2 m + r_2 \Rightarrow (q_1 - q_2) m = r_2 - r_1$ bulunur. $0 < r_2 - r_1 < m$ old.dan $0 < (q_1 - q_2) m < m$ dir.
Fakat $1 \leq q_1 - q_2 = 1 m \leq (q_1 - q_2) m$ olacağından $r_1 \neq r_2$ olmasının bizi çelişkiye götürdüğü anlaşılır.
O halde $r_1 = r_2$ ve dolayısıyla $q_1 = q_2$ dir.

Teorem 2.1.13. $m \neq 0$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun. Tek türlü olarak belirli öyle $q, r \in \mathbb{Z}$ bulunur ki $n = qm + r$ ve $0 \leq r < |m|$ dir.

Tanım 2.1.14. $n = qm + r$, $0 \leq r < |m|$ ise q ya bölüm, r ye de kalan denir. Verilen m ve n tam sayıları için q ve r yi bulmaya da n yi m ile kalanlı bölme denir.

Örnek: $n = 13, m = 5 \Rightarrow 13 = 2 \cdot 5 + 3$, $0 \leq 3 < 5$ dir.
$n = 13, m = -5 \Rightarrow 13 = (-2)(-5) + 3$, $0 \leq 3 < |-5| = 5$.